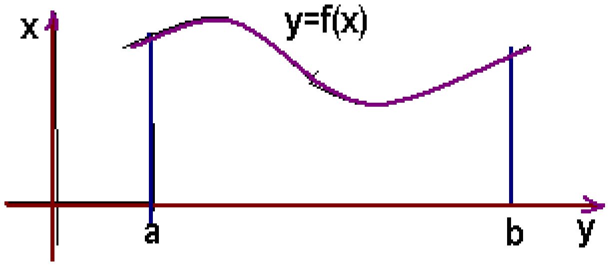
Conceptos previos

¡Bienvenidos al maravilloso mundo de las aplicaciones de las integrales definidas!.

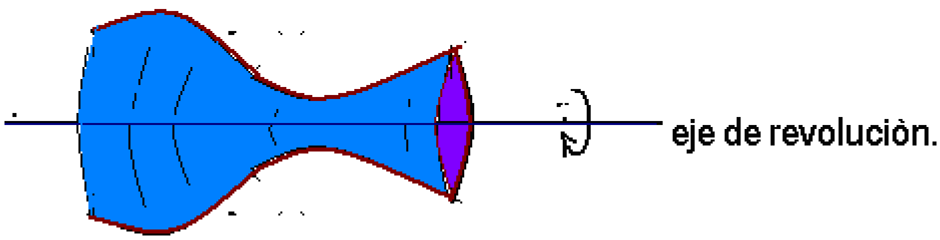
LA INTEGRACIÓN INDEFINIDA EN EL CÁLCULO DE VOLUMENES.

CONCEPTOS PREVIOS:

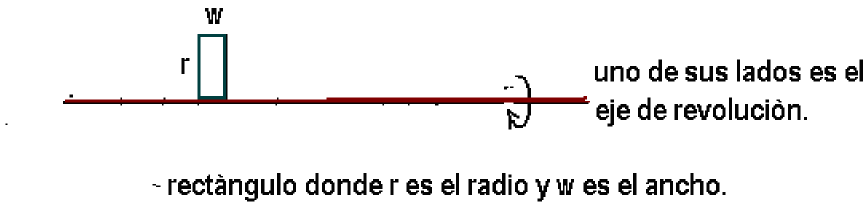
Sea f una función no negativa en el intervalo $[a,b]$



Si se gira esta región del plano alrededor de cualquiera de los ejes coordenados o de una recta del plano, el sólido resultante es conocido como sólido de revolución y al eje citado como eje de revolución.

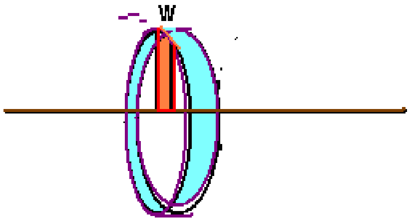


El volumen de un sólido de revolución se puede calcular por el método del disco.



El caso mas sencillo de un sólido de revolución es aquel en que un rectángulo gira alrededor de uno de sus lados.

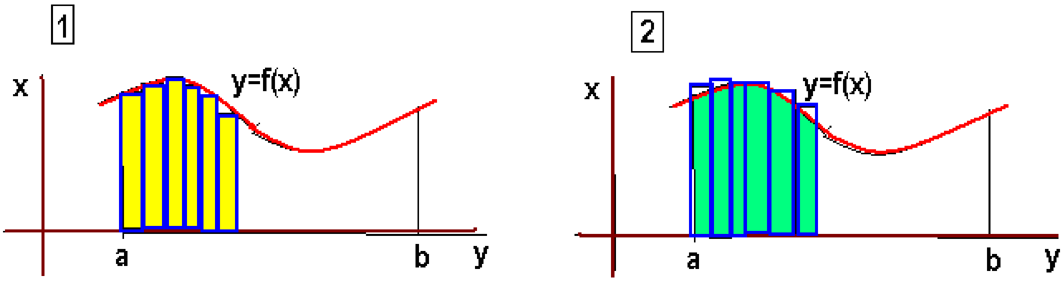
Cuando gira este rectangulo sobre su eje de revoluciòn genera un disco cuyo volumen es :



$$\Delta v = \pi r^2 \Delta x .$$

Para calcular el volumen del sólido de revolución procedemos a interpretar intuitivamente el área.

Al girar los rectángulos que aparecen en la figura alrededor del eje de las



Volumen por defecto   Volumen por exceso

abscisas, Fig. 1 se obtienen cilindros cuyo volumen v_1 es menor que el volumen del sólido de revolución v_s

Si se procede en forma análoga con los rectángulos de la fig. 2, el volumen del sólido de revolución v_s , es menor al de los cilindros v_2

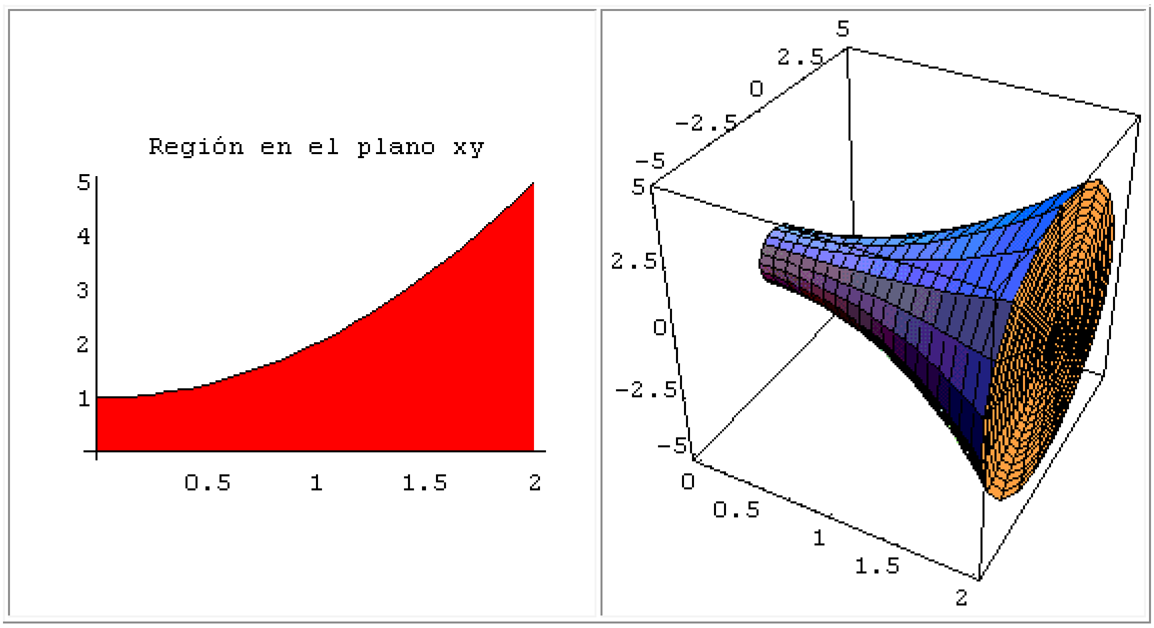
Entonces: $v_1 < v_s < v_2$

La diferencia entre v_2 y v_1 , va tendiendo a cero y en el límite, la suma de los volúmenes del sólido de revolución generado por la función f(x) al girar alrededor del eje de las x, se expresa por:

HAY QUE CONSIDERAR DOS CASOS :

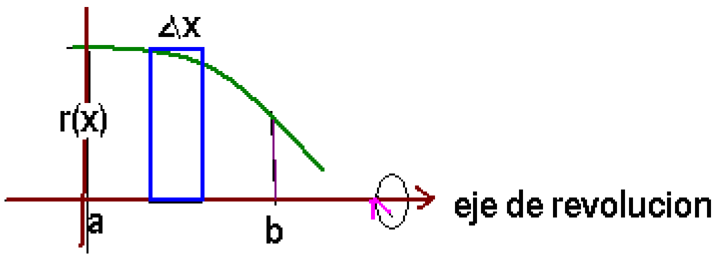
1º) CUANDO EL EJE DE REVOLUCION ES HORIZONTAL☹GIRO EN TORNO AL EJE X

$$f(x)= x^2 + 1$$



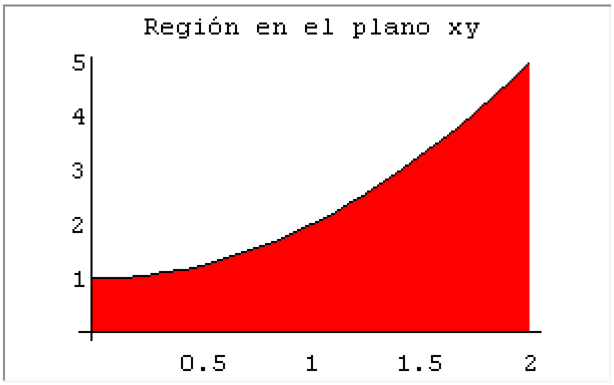
$$\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

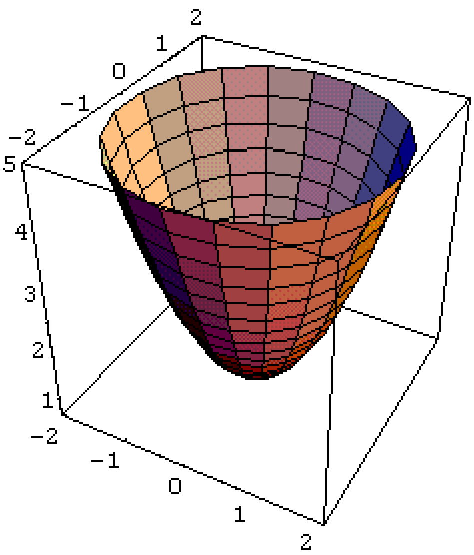


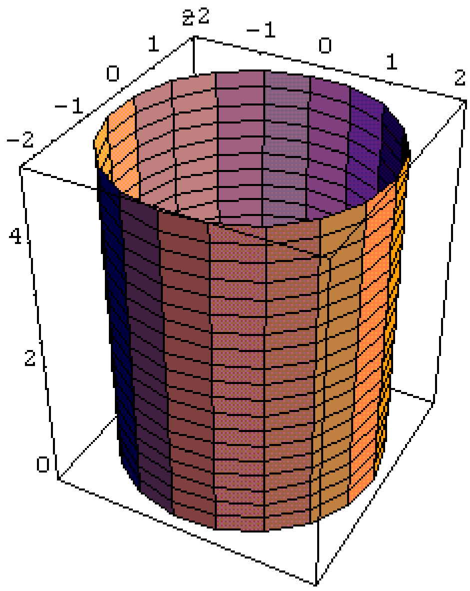
2º) CUANDO EL EJE DE REVOLUCION ES VERTICAL (Giro Nen torno al eje Y)

f(x)= $x^2 + 1$



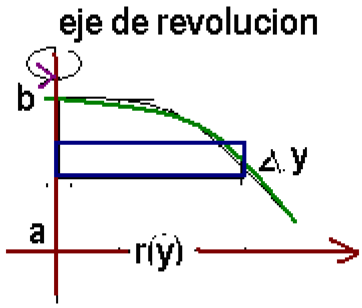
Las siguientes dos gráficas, son las superficies que la región *xy* genera al girar alrededor del eje *y*. La primera superficie la genera la parte superior de la región *xy*, la segunda superficie es generada por los lados (orillas) de la región.





V= $\int_a^b \pi[f(y)]^2 dy$

V= $\pi\int_a^b [f(y)]^2 dy$



APLICACIONES:

1.-Calcular el volumen de la región limitada por las curvas: y= x^2+2, con y= $\frac{x}{2}+1$, con x=0, x=1, si gira alrededor del eje de las abscisas.

$$(\frac{79}{20}\pi.u^3)$$

2.- Calcule el volumen de la región limitada por la curva: y= $\sqrt{x}$, y las rectas y=0, x=4, si gira alrededor del eje de las abscisas.

$$(8\pi.u^3)$$

3.- Calcula el volumen del sólido de revolución cuando la región limitada por las curvas: y= $2\sqrt{5x}$ y x=0, x=4, gira alrededor del eje de las abscisas.

$$(160\pi.u^3)$$

4.- Calcular el volumen del sólido de revolución cuando la región : y=4x-x ^{2}, esta limitada por: x=0, x=4, al girar alrededor de la recta: y=6.

$$(\frac{1408}{15}\pi.u^3)$$

5.-Hallar el volumen de la región determinada por la curva de ecuación: y=e ^{x}, el eje OX, el eje OY y la recta x=3, al girar alrededor del eje OX.

$$(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^6}\right)u^3$$

6.-Calcular el volumen engendrado por la superficie, al girar la elipse: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, alrededor del eje OX.

$(\frac{8}{3}\pi . u^3)$

7.- Calcule el volumen limitado por el elipsoide de revolución generado por la elipse $2x^2+y^2=1$, al girar alrededor del eje OX.

$$(\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi . u^3)$$

8.- Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX, los recintos siguientes. R(f; a,b).

8.1.- $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ $x=0$, $x=1$

8.2.- $f(x)=x^2$ $x=-1$, $x=2$

8.3.- $f(x)=$ senx $x=0$, $x=\pi$

8.4.- $f(x)=x-x^2$ $x=0$, $x=1$.

$$(\frac{\pi}{2},\frac{31\pi}{5},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{30})$$

9.- Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX los recintos limitados por las curvas que se indican:

9.1.- $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $g(x) = 1$

9.2.- $f(x)=x^2$, $g(x)=x^{\frac{1}{2}}$

9.3.- $f(x)= x^2 -1$, $g(x)= 1-x^2$

$$(\frac{\pi}{2},\frac{9\pi}{70},\frac{64\pi}{15})$$

10.- Hallar el volumen del cono engendrado al girar el segmento de la recta que une el origen de coordenadas con el punto P(a,b) al girar alrededor del eje OY.

$$(\frac{1}{3}\pi a^2 b)$$

11.- Hallar el volumen engendrado al girar un arco de la sinusoide y= sex y el eje OX, alrededor del eje OY.

$\left(\dfrac{\pi}{2} \right)$

12.- Hallar el volumen engendrado, al girar la curva y= xe^{x} , y las rectas y=0, x=1, alrededor del eje OX.

$$\frac{\pi}{4}\left(e^{2}-1\right)$$

13.- Hallar el volumen de sólido que se genera al girar alrededor del eje OX, las curvas: y^{2} =2px, y la curva x=a